STABLE RANK OF CROSSED PRODUCTS BY $\mathbb{R}$ OR $\mathbb{T}$ (Progress in Operator Algebras)

須藤, 隆洋

数理解析研究所講究録
1131巻 2000年 17-25

STABLE RANK OF CROSSED PRODUCTS BY $\mathbb{R}$ OR $\mathbb{T}$

須藤隆洋 (TAKAHIRO SUDO)

琉球大学理学部

今回の講演の主題は次の通りである：

主題 1. $\mathfrak{A}$ を任意の C^*-環とし、$\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の作用 α よる接合積とする。このとき、この接合積のステイブル・ランク (stable rank, sr) は、何で評価できるか？

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}) \leq ?$$

主題 2. $\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{T}$ を任意の C^*-環 $\mathfrak{A}$ の $\mathbb{T}$ の作用 α よる接合積とする。このとき、このステイブル・ランクは、何で評価できるか？

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{T}) \leq ?$$

まず最初に、Rieffel [Rf] によって導入された C*-環のステイブル・ランクについて復習する。

定義. $\mathfrak{A}$ を C*-環とする。$\mathfrak{A}$ に単位元がないときは、その単位元付加 $\mathfrak{A}^+$ を考える。$\mathfrak{A}$ のステイブル・ランク $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geq 1$ が n 以下であるとは、

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leq n \Leftrightarrow L_n(\mathfrak{A}) \text{ が } \mathfrak{A} \text{ の直和 } \mathfrak{A}^n \text{ で稠密}$$

Research partially supported by Japan Society for the Promotion of Science

ただし、次は同値である：

$$(a_i)_{i=1}^n \in L_n(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^* a_i \text{が } \mathfrak{A} \text{ で可逆である。}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n b_i a_i \text{が } \mathfrak{A} \text{ で可逆となる } (b_i)_{i=1}^n \in \mathfrak{A}^n \text{が存在する。}$$

注. この定義は、コンパクト、ハウスドルフ空間 X の被覆次元の、X 上の連続関数全体のなす可換 C*-環 $C(X)$ による代数的特徴づけを、一般に非可換の C*-環に拡張したものである。

Rieffel によって得られたステイブル・ランクのいくつかの基本結果 [Rf] は、以下で断わりなしに用いられる場合がある。

例. X を局所コンパクト、ハウスドルフ空間とし、$C_0(X)$ を無限遠で 0 になる X 上の連続関数全体のなす可換 C*-環とする。このとき、

$$\mathrm{sr}(C_0(X)) = [\dim X/2] + 1,$$

ただし、$\dim X$ は X の被覆次元で、$[\cdot]$ はガウス記号を意味する。

$\mathfrak{A} = C_0(X)$ とし、αを $\mathfrak{A}$ 上の $\mathbb{R}$ の自明な作用とする。このとき、$\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong C_0(X \times \mathbb{R})$. 従って、位相積空間に対する被覆次元の積定理 (cf.[Ng]) をもちいて、次がわかる：

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}) = [\dim(X \times \mathbb{R})/2] + 1 \le [(\dim X + 1)/2] + 1$$
$$\le [\dim X/2] + 1 + 1 = \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

特に、$X = \mathbb{R}^n$で、αが自明のときは、

$$\mathrm{sr}(C_0(\mathbb{R}^n) \rtimes_\alpha \mathbb{R}) = [(n+1)/2] + 1 = \begin{cases} \mathrm{sr}(C_0(\mathbb{R}^n)) + 1 & n \text{ が奇数、} \\ \mathrm{sr}(C_0(\mathbb{R}^n)) & n \text{ が偶数。} \end{cases}$$

$\mathfrak{A} = C_0(\mathbb{R})$, αがシフトのとき、$\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong \mathbb{K}$ (cf.[Pd, 7.7]). ただし、$\mathbb{K}$ は可算無限次元ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体のなす C*-環である。このとき、

$$\mathrm{sr}(\mathbb{K}) = 1 < \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 1 = 2.$$

例. $\mathfrak{A}$ を任意の C*-環とし、αを $\mathbb{T}$ の $\mathfrak{A}$ 上で自明な作用とする。このとき、

$$\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{T} \cong \mathfrak{A} \otimes C^*(\mathbb{T}) \cong \mathfrak{A} \otimes C_0(\mathbb{Z}).$$

したがって、

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{T}) = \mathrm{sr}(\mathfrak{A}).$$

高級な例として、$\mathfrak{A}_n = C(\mathbb{T}^n) \rtimes_\beta \mathbb{Z}$ を単純な非可換トーラスとし、αを $\mathbb{T}$ の $\mathfrak{A}_n$ 上の双対作用とする。このとき、高井双対定理 (cf.[Pd]) より、

$$\mathfrak{A}_n \rtimes_\alpha \mathbb{T} \cong C(\mathbb{T}^n) \otimes \mathbb{K}.$$

一方、Elliott-Lin [EL] の結果より、$\mathfrak{A}_n$は、$C(\mathbb{T})$ 上の行列環の有限直和の帰納極限になっている。ゆえに、$\mathrm{sr}(\mathfrak{A}_n) = 1$. したがって、

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A}_n \rtimes_\alpha \mathbb{T}) = \begin{cases} 1 = \mathrm{sr}(\mathfrak{A}_1) & n = 1 \\ 2 = \mathrm{sr}(\mathfrak{A}_n) + 1 & n \geq 2. \end{cases}$$

以上の例をふまえて、今回の主結果は次のとおりである：

定理 1. $(\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha)$ を $\mathbb{R}$ による任意の C^*-力学系とすると、

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

また、$(\mathfrak{A}, \mathbb{T}, \alpha)$ を $\mathbb{T}$ による任意の C^*-力学系とすると、

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{T}) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

注. 上の定理で、$\mathbb{T}$ を可分な可換コンパクト群で置き換えることができる。

これらの公式の左辺を直接計算するのは、一般には難しい問題で、作用 αの情報が関与してくる。上の不等式の良いところは、右辺が $\mathfrak{A}$ だけの情報で決まることである。

また、上の美しい評価式は、次の Rieffel による $\mathbb{Z}$ による接合積の stable rank の評価式が得られて以来予想されてきたが、今まで解けてなかった。

(Rieffel). $\mathbb{Z}$ による任意の C^*-力学系 $(\mathfrak{A}, \mathbb{Z}, \alpha)$ に対して、

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

注. 位相空間の被覆次元に関して、次の積公式が成り立つ (cf.[Ng])：

$$\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y.$$

ただし、X, Y は局所コンパクト、ハウスドルフ空間である。従って、主定理の公式は、この公式の非可換版と考えられる。

また、定理1がもっともらしい直感的な理由は、接合積 $\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ は、$\mathbb{R}$ 上のコンパクトな台をもつ $\mathfrak{A}$ 値連続場 (積は合成積) の全体を C*-完備したものなので、底空間が $\mathbb{R}$ で、ファイバーが $\mathfrak{A}$ の適当なファイバー空間の連続断面全体とみなせるためである。

定理1の証明の概略は最後に述べ、その前に、定理1の発展と応用を先に取り上げる。上の定理1の二つの公式を、次の形に一つにまとめることができる：

系 **2.** $\mathfrak{A}$ を C^*-環とし、G を連結可換リー群とする。このとき、次が成り立つ：

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes G) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + (\dim G \wedge (\dim \hat{G} + 1)).$$

ただし、$\hat{G}$は G の双対群で、$\wedge$は最小値である。

注. 連結可換リー群は直積リー群 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^s$ $(n, s \geq 0)$ に同型である。

さらに、評価は荒くなるが、Rieffel の $\mathbb{Z}$ 接合積に対する公式も考慮にいれて、次をえる：

系 **3.** $\mathfrak{A}$ を C^*-環とし、G を基本位相アーベル群とする。このとき、次が成り立つ：

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes G) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + \dim \hat{G} + 1.$$

注. 基本位相アーベル群は直積リー群 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^s \times F \times \mathbb{Z}^l$ $(n, s, l \geq 0)$ を意味する。ただし、F は有限可換群である。

さらに、定理 1 の応用として、

系 **4.** $\mathfrak{A}$ を C^*-環とし、$G = \mathbb{R}$ または $\mathbb{T}$ とする。このとき、G による接合積 $\mathfrak{A} \rtimes_\alpha G$ の連結ステイブル・ランク (connected stable rank, csr) とリアル・ランク (real rank, RR) は次で評価される：

$$\mathrm{csr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha G) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 2, \quad \mathrm{RR}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha G) \leq 2\,\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 1.$$

注. 任意の C*-環 $\mathfrak{A}$ の連結ステイブル・ランクとリアル・ランクは、ステイブル・ランクで次のように評価される ([Rf],[BP])：

$$\mathrm{csr}(\mathfrak{A}) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 1, \quad \mathrm{RR}(\mathfrak{A}) \leq 2\,\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) - 1.$$

定理 1 の別の応用として、

定理 **5.** $\mathfrak{A}$ を C^*-環とし、G を連結可解リー群とする。任意の接合積 $\mathfrak{A} \rtimes G$ に対し、次がなりたつ：

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes G) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + \dim G.$$

特に、G の C^*-群環 $C^*(G)$ の場合は、

$$\mathrm{sr}(C^*(G)) \leq \dim G$$

注.

任意の連結可解リー群 G は、岩沢の結果 [Iw] により、次の連続する半直積に同型である：

$$(\cdots(H_1 \rtimes H_2) \rtimes \cdots) \rtimes H_{\dim G}, \quad H_i \cong \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{T}\ (1 \leq i \leq \dim G).$$

このとき、$\mathfrak{A} \rtimes G$ は、次の接合積の繰り返しでかける：

$$(\cdots(\mathfrak{A} \rtimes H_1) \rtimes H_2 \cdots) \rtimes H_{\dim G}.$$

1 次元連結リー群は、$\mathbb{R}$ か $\mathbb{T}$ に同型である。従って、この定理は定理 1 の一般化である。

また、G に強い条件がついた場合 (I 型、巾零など) や、Mautner 群や Dixmier 群などの非 I 型の具体的な場合、これらの C*-群環の stable rank のより精密な評価式がえられている ([Sh], [ST1,2], [Sd1,2,3,4,5])。

定理 5 の応用として、

系 **6.** 任意の C^*-環 $\mathfrak{A}$ の連結可解リー群 G による接合積 $\mathfrak{A} \rtimes G$ に対して、

$$\mathrm{csr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha G) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + \dim G + 2, \quad \mathrm{RR}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha G) \leq 2\,\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) + 2\dim G - 1.$$

特に、G の C^*-群環 $C^*(G)$ の場合は、

$$\mathrm{csr}(C^*(G)) \leq \dim G + 2, \quad \mathrm{RR}(C^*(G)) \leq 2\dim G + 1.$$

最後に定理 1 の証明の概略を述べる。

定理 1 の証明の概略. $\mathfrak{A}$ は単位元をもつと仮定してよい。もし $\mathfrak{A}$ に単位元がない場合は、その単位元付加 $\mathfrak{A}^+$ と、$\mathbb{R}$ の $\mathfrak{A}$ 上の作用 α の、$\mathfrak{A}^+$ への自明な拡張 α^+ を考える。このとき、$\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ は、$\mathfrak{A}^+ \rtimes_{\alpha^+} \mathbb{R}$ の閉イデアルになる。従って、

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{A}^+ \rtimes_{\alpha^+} \mathbb{R}).$$

次に、$\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の普遍表現に対応する共変表現 (π, u) を考える。さらに、$C^*(\mathbb{R})$ の u に対応する次の表現を同じ記号で u とする：

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) u_t dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

このとき、[Pd, Theorem 7.6.6] の証明より、$\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ は、$\pi(\mathfrak{A})$ と $u(C^*(\mathbb{R}))$ で生成される C*-環 $C^*(\pi(\mathfrak{A})u(C^*(\mathbb{R})))$ に閉イデアルとして含まれることがわかる。また、(π, u) が共変表現であることから、$C^*(\pi(\mathfrak{A})u(C^*(\mathbb{R})))$ は、元 $\pi(a)u(f)$, $a \in \mathfrak{A}$, $f \in C^*(\mathbb{R})$ の有限線形和で生成されていることに注意する。

次に、$\mathfrak{B} = C^*(\pi(\mathfrak{A})(u(C^*(\mathbb{R}) + \mathbb{C}1))$ とおく。ただし、1 は $\pi(\mathfrak{A})$ の単位元である。このとき、$\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ は $\mathfrak{B}$ の閉イデアルとみなせる。よって、

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}) \leq \mathrm{sr}(\mathfrak{B}).$$

さらに、$C^*(\mathbb{R})^+ \cong C(\mathbb{T})$ で、$C(\mathbb{T})$ がユニタリ元である座標関数 $\mathrm{id}(z) = z$ で生成されていることに注意する。写像 $C(\mathbb{T}) \cong C^*(\mathbb{R})^+ \to u(C^*(\mathbb{R})) + \mathbb{C}1$ によるこのユニ

タリ元の像を W とする。このとき、次の有限線形和の集合：

$$D = \mathrm{span}\{\pi(a)W^k \mid a \in \mathfrak{A}, k \in \mathbb{Z}\}$$

が $\mathfrak{B}$ を生成することがわかる。この D は一般の $\mathbb{Z}$-接合積の稠密部分に似ているが、π と W との関係は共変的ではない。そこで、Rieffel の $\mathbb{Z}$-接合積のステイブル・ランクの評価式 [Rf] の証明の一部改良版を証明すればよいことになる。しかしながら、ここに、離散接合積と連続接合積の違いが現れていて、証明をつめるのはかなりやっかいなので、興味ある読者は [Sd6] を参照せよ。

□

REFERENCES

[BP] L.G. Brown and G.K. Pedersen, *C^*-algebras of real rank zero*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 131–149.

[EL] G.A. Elliott and Q. Lin, *Operator Algebras and Their Applications*, Fields Ints. Commun. 13, 1997, pp. 91–123.

[Iw] K. Iwasawa, *On some types of topological groups*, Ann. Math. **50** (1949), 507–558.

[Ng] K. Nagami, *Dimension Theory*, Academic Press, New York-London, 1970.

[NOP] M. Nagisa, H. Osaka and N.C. Phillips, *Ranks of algebras of continuous C^*-algebra valued functions*, Preprint.

[Os] H. Osaka, *Real rank of crossed products by connected compact groups*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 257–264.

[Pd] G.K. Pedersen, *C^*-Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, London-New York-San Francisco, 1979.

[Rf] M.A. Rieffel, *Dimension and stable rank in the K-theory of C^*-algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 301–333.

[Sh] A.J-L. Sheu, *A cancellation theorem for projective modules over the group C^*-algebras of certain nilpotent Lie groups*, Canad. J. Math. **39** (1987), 365–427.

[Sd1] T. Sudo, *Stable rank of the reduced C^*-algebras of non-amenable Lie groups of type I*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3647–3654.

[Sd2] ———, *Stable rank of the C^*-algebras of amenable Lie groups of type I*, Math. Scand. **84** (1999), 231–242.

[Sd3] ———, *Dimension theory of group C^*-algebras of connected Lie groups of type I*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[Sd4] ———, *Structure of group C^*-algebras of Lie semi-direct products $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$*, Preprint.

[Sd5] ———, *Structure of group C^*-algebras of the generalized Dixmier groups*, Preprint.

[Sd6] ———, *Stable rank of crossed products by $\mathbb{R}$ or $\mathbb{T}$*, Preprint.

[ST1] T. Sudo and H. Takai, *Stable rank of the C^*-algebras of nilpotent Lie groups*, Internat. J. Math. **6** (1995), 439–446.

[ST2] ———, *Stable rank of the C^*-algebras of solvable Lie groups of type I*, J. Operator Theory **38** (1997), 67–86.
[Tk] H. Takai, *Stable rank of crossed products by compact abelian groups*, Preprint (1993).

903-0213 沖縄県 中頭郡西原町千原 1 番地 琉球大学 理学部 数理科学科
E-mail address: sudo@math.u-ryukyu.ac.jp